Versuch 243 - thermisches Rauschen

PAP 2.2

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **4**

Kurs: **Diensttag**

Inhaltsverzeichnis

0 Messprotokoll **1**

1 Einleitung **3**

1.1 Motivation 3

1.2 Grundlagen aus der Physik 3

2 Durchführung **6**

2.1 Versuchskizzen/Schaltplan 6

2.2 Messaufbau 6

3 Auswertung **7**

3.1 Qualitative Untersuchung 7

3.2 Graphische Auswertung des Frequenzgangs 8

3.3 Bestimmen der Boltzmannkonstante 9

3.4 Güte des Fits 11

4 Zusamenfassung und Diskussion **12**

4.1 Zusammenfassung 12

4.2 Diskussion und Kritik 12

4.3 Fazit 12

0. Messprotokoll

Messprotokoll 243: Thermisches Rauschen

07.01.25
Harish Mahendran
Jonas Schwer

Messgeräte:

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert
- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60 dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter
- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Beheizbarer Widerstand 4 kΩ bei 0°C (Pt4000-Widerstand)
- Heizungsnetzteil mit integrierter Regelelektronik für den beheizbaren Widerstand
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC

Aufgabe 1: Qualitative Untersuchung

Wir stecken den umschaltbaren Widerstand mit kleinstem eingestellten Widerstand auf den Verstärkereingang. Einmal schauen wir uns die Frequenzen sowohl mit und ohne Bandpassfilter an und machen ein Bildschirmfoto.

Aufgabe 2: Messung der Rauschspannung bei Widerständen

Wir stecken den Widerstand erneut direkt an den Verstärker mit Bandpass und nehmen für 6 verschiedene Widerstände (5kΩ, 10kΩ, 15kΩ, 20kΩ, 25kΩ) den Effektivwert der Spannung auf. Danach nehmen wir ihn noch bei Erdung (0Ω) auf. Wir machen Fotos.

R [kΩ]	0	5	10	15	20	25	30
$\bar{U}_{eff}$ [mV]	1,3688	2,4088	3,1195	3,7003	4,2006	4,6674	5,084
std [mV]	0,00663	0,0091	0,013	0,0142	0,017	0,0164	0,0187

Tabelle 1: Mittlere effektive Spannung pro Widerstand

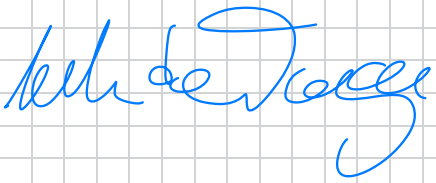
Aufgabe 3: Messung des Frequenzgang und des Bandfilters

Wir bestimmen den Frequenzgang des Bandfilters und des Verstärkers mit dem Frequenzgenerator. Am Circuit Analyser sind folgende Einstellungen eingestellt:

- Vertical Scale: 5 dB/div
- V-Range: 0,3 V
- Frequency Range: 1 MHz
- Frequency Start: 100 Hz
- Stellen Sie für die Frequenzschritte 20% ein (Menupunkt `Options` → `Frequency Step Size`)
- Wählen Sie aus dem Menupunkt `Options`, die Option `Automatic Voltage Scale` und folgen Sie den Hinweisen des erscheinenden Fensters.

Abschwächung: $D = (0{,}001 \pm 9{,}2\%)$

Anschließend speichern wir die Daten ab.



1. Einleitung

1.1 Motivation

Messgeräte weisen in der Realität bei genauen Messungen immer ein Rauschen von ihren Spannungswerten auf. Dies liegt an den thermischen Effekten am Schaltkreis. In diesem Versuch werden wir versuchen dieses Rauschen zu minimieren bzw. in die Rechung mit ein zu beziehen. Mit der Nyquist-Beziehung lässt sich auch die Boltzmann-Konstante k bestimmen.

1.2 Grundlagen aus der Physik

Aufgrund der Brown'schen Bewegung der Ladungsträger in einem Leiter einer Temperatur > 0K sind bei genauer Messung stets variierende elektrische Potentiale festzustellen. Die so gegebenen Potentialdifferenzen bezeichnet man als Rauschspannung U_r. Da die Brown'sche Bewegung der Ladungsträger ungerichtet ist, gilt für ihren zeitlichen Mittelwert:

$$\langle U_r \rangle = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t U_r(t')dt' \right) = 0 \tag{1}$$

Für ausreichend lange zeitliche Mittelung wird sich der Wert also beliebig nahe an Null annähern. Um nun allerdings die Stärke des Rauschens quantifizieren zu können, wird, in grober Analogie zum quadratischen Mittel der Geschwindigkeit bei thermischen Teilchen, ihr Effektivwert definiert als:

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t U_r^2(t')dt' \right) \tag{2}$$

Dabei gilt für diesen Effektivwert bei einer Temperatur T des Widerstandes R für eine Messung über die Bandbreite Δf die Nyquist-Beziehung:

$$\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f \tag{3}$$

Die Gültigkeit dieser Formel ist leicht einsehbar: Eine höhere Temperatur muss aufgrund der verstärkten Brownschen Bewegung der Ladungsträger zu einem verstärkten Rauschen führen, daher die Proportionalität in der Temperatur. Nach dem ohmschen Gesetz ist die Spannung bei gleicher Stromstärke, also Bewegung der Ladungsträger, direkt proportional zum Widerstand, dies zeigt sich ebenso in der Gleichung. Um die Bandbreitenabhängigkeit zu erklären, ist es nötig zu beachten, dass es sich hier um ein weißes Rauschen handelt, das heißt ein Rauschen, welches auf allen Frequenzbändern gleichermaßen auftritt. Dadurch

vergrößert sich der Effektivwert proportional zur Breite des Frequenzbandes, auf dem er vermessen wird.

Bestimmung der Boltzmannkonstante

Die Boltzmannkonstante lässt sich aus dem Effektivwert der Rauschspannung nun über die Nydquist-Beziehung (3) leicht bestimmen, vorausgesetzt die Temperatur, den Widerstand und die Bandbreite der Messung sind bekannt. Da die Rauschspannung auch bei hohen Temperaturen noch sehr gering sein kann, sind einige spezielle Anforderungen an den Messaufbau gestellt.

So muss der Widerstand, an dem die Spannung gemessen wird, beispielsweise gegenüber Störsignalen wie zum Beispiel dem Netzrauschen abgeschirmt werden, damit das schwache Signal überstanden wird. Auch ist eine Signalverstärkung um ein Vielfaches nötig, um das Signal messbar zu machen. Zudem muss die Bandbreite durch einen Bandpassfilter eingeschränkt werden - Der Verstärker ist in diesem Fall nicht noch zusätzlich zur Bandbreitenregulierung geeignet, da er unabgeschirmt sehr anfällig gegenüber Störquellen ist, und diese verstärken würde, zudem sind die Ränder seines Frequenzbandes nicht ausreichend scharf definiert.

Zu beachten ist auch, dass die verwendeten Elemente selbst zum Rauschen beitragen. So muss diese Rauschverfälschung durch den Verstärker beachtet werden. Wird der Bandpassfilter hinter dem Verstärker geschaltet, ist sein Rauschen vernachlässigbar. Der Effektivwert des Rauschens im Verstärker $\langle U_v^2 \rangle$ trägt zum zum Gesamtwert $\langle U_{r+v}^2 \rangle$ bei nach:

$$\langle U_{r+v}^2 \rangle = \langle (U_r + U_v)^2 \rangle = \langle U_r^2 \rangle + \langle U_v^2 \rangle + 2\langle U_r U_v \rangle \tag{4}$$

Wobei der hintere Summand nach Gleichung (1) bei ausreichend langer Messung verschwindet, so ergibt sich die Additivität der quadratischen Effektivwerte:

$$\langle U_{r+v}^2 \rangle = \langle U_r^2 \rangle + \langle U_v^2 \rangle \tag{5}$$

Um die Boltzmannkonstante mit dem Messaufbau bestimmen zu können, ist zusätzlich noch Kenntnis über seinen Frequenzgang $g(f)$ nötig:

$$g(f) = \frac{U_{\text{aus}}(f)}{U_{\text{ein}}(f)} \tag{6}$$

Denn mit diesem Wert muss der gemessene Ausgangswert $\langle U_{\text{aus}}^2 \rangle$ normiert werden, da der Frequenzgang das Signal überlagert, nach:

$$d\langle U^2\rangle = g_0(f)^2\langle U_r^2\rangle = 4kTRg_0(f)^2df \tag{7}$$

Also in integraler Form mit $B = \int g_0(f)^2df$ als der experimentell zu bestimmenden äquivalenten Rauschbandbreite:

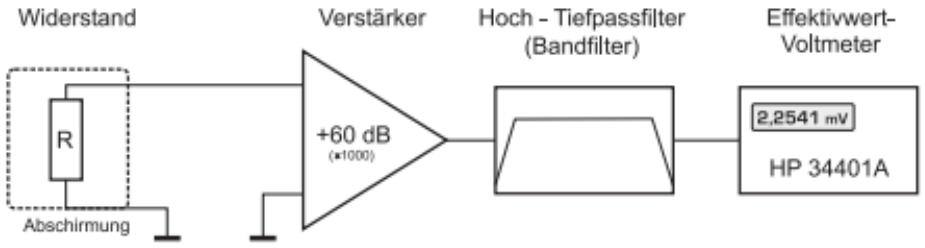
$$\langle U_{\text{aus}}^2\rangle = 4kTR\int_0^\infty g_0(f)^2df = 4kTRB \tag{8}$$

Beachtet man nun, dass sich das Verstärkerrauschen nach (5) zum Ausgangssignal addiert, erhält man schließlich für die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{r+v}^2\rangle - \langle U_v^2\rangle}{4TRB} \tag{8}$$

2. Durchführung

2.1 Versuchskizzen/Schaltplan



Versuchskizze

2.2 Messaufbau

Für den primären Aufbau wird das Rauschsignal des zu untersuchenden abgeschirmten ohmschen Widerstandes durch den Verstärker geleitet, das Ausgangssignal wird nach durchlaufen des Bandpassfilters in das Multimeter zur Messung des Effektivrauschwertes eingekoppelt. Der Verstärker wird, um Einwirkungen durch Netzrauschen zu minimieren, durch eine Batterie betrieben.

3. Auswertung

3.1 Qualitative Untersuchung

Man sieht, dass ohne Bandpassfilter alle Frequenzen gleich vertreten sind. Da es sich hier um weißes Rauschen handelt ist dies auch zu erwarten.

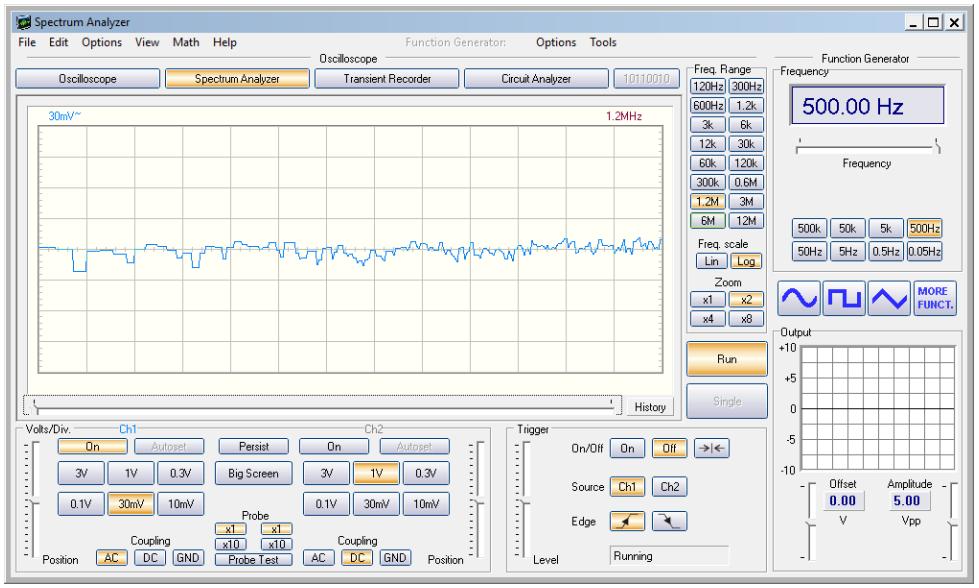


Abbildung 1: Ohne Bandpass und bei niedrigen Frequenzen

Schaltet man nun ein Verstärker hinzu sieht man dass höhere Frequenzen weniger stark verstärkt werden. Dies lässt sich mit den Eigenschaften eines Verstärkers erklären. Dieser lässt nämlich niedrige Frequenzen besser durch als hohe Frequenzen.

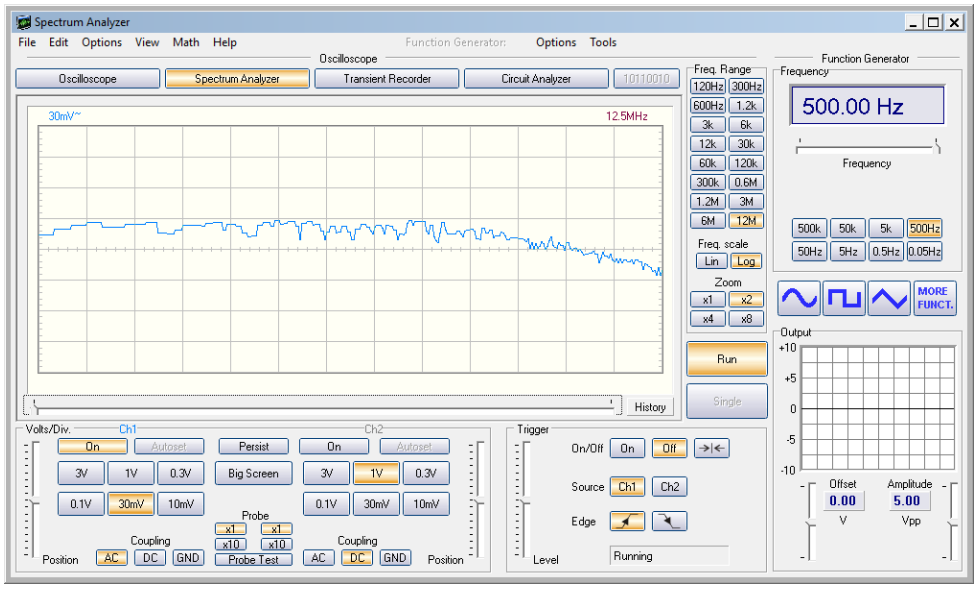


Abbildung 2: Ohne Bandpass und bei hohen Frequenzen

Schaltet man nun ein Bandpassfilter dazu, fällt die Kurve früher und stärker ab.

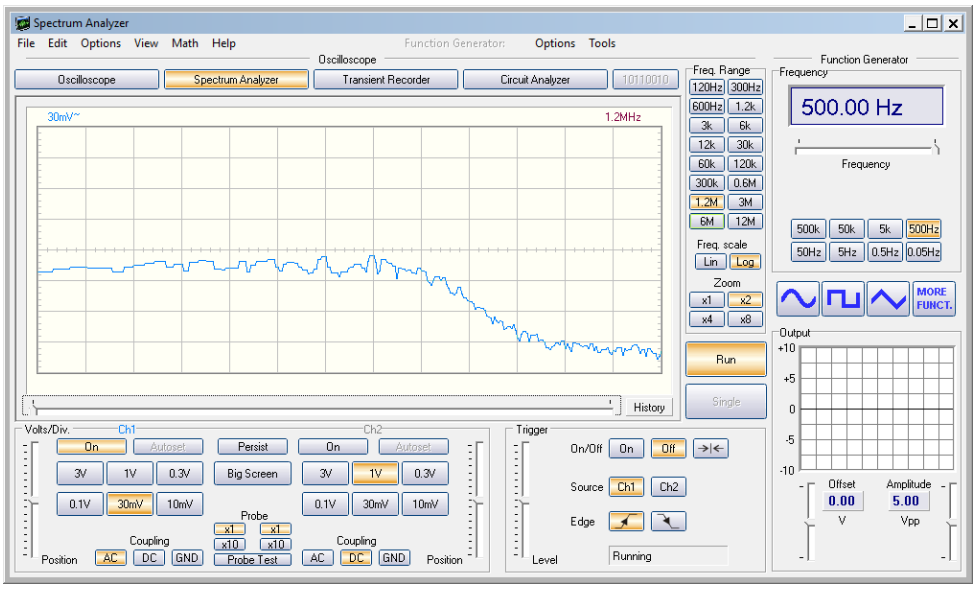


Abbildung 2: Mit Bandpass

3.2 Graphische Auswertung des Frequenzgangs

Der gemessene Frequenzgang wird aus dem entsprechenden Datensatz heraus geplottet. Werte die außerhalb des Auflösungsbereiches des Oszilloskop liegen werden dabei abgeschnitten.

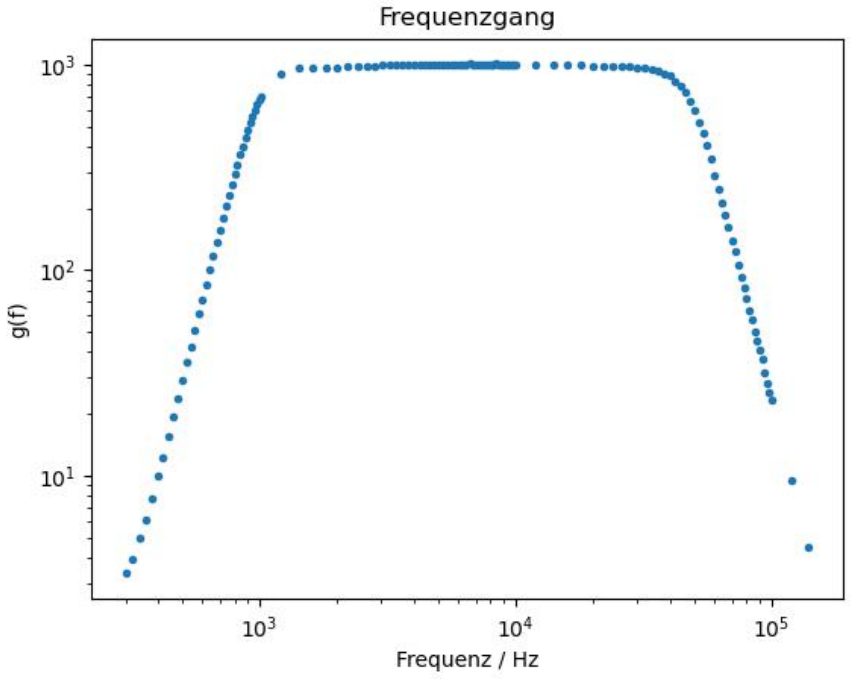


Abbildung 3: Doppellogarithmisches Diagramm mit Frequenzgang

Nun wird auf diese Messwerte folgende Funktion gefittet

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + (\frac{\Omega_1}{f})^{2n_1}}\sqrt{1 + (\frac{f}{\Omega_2})^{2n_2}}} \tag{9}$$

daraus ergibt sich folgender Plot:

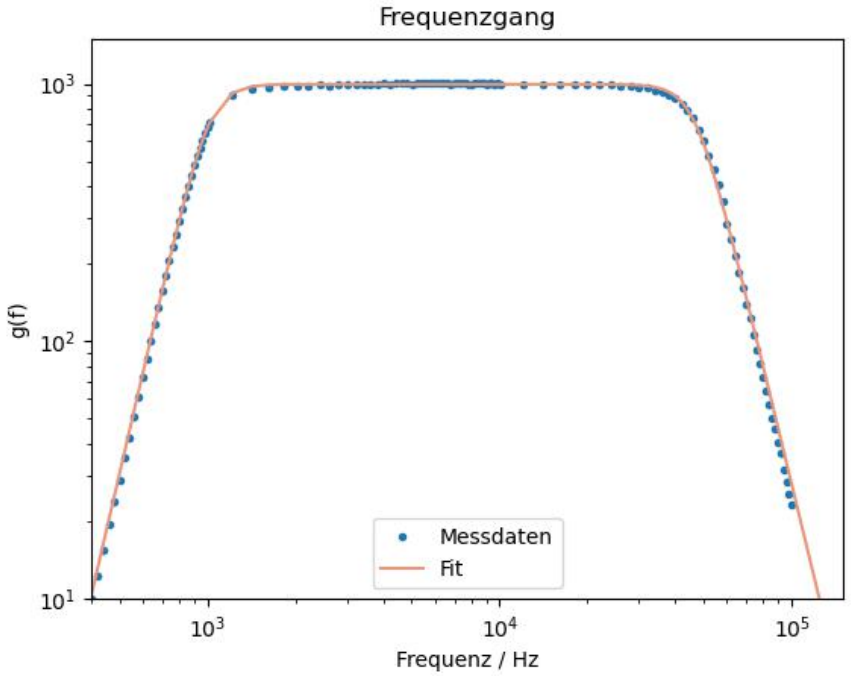


Abbildung 4: Frequenzgang mit Fitfunktion

Intrigiert man nun über die Kurve erhält man nun folgenden Parameter B. Der Fehler ist gegeben als 2%.

$$\begin{aligned} B &= (4,606 \pm 2\%) \cdot 10^{10} \frac{V^2}{s} \\ &= (4,61 \pm 0,09) \cdot 10^{10} \frac{V^2}{s} \end{aligned}$$

3.3 Bestimmen der Boltzmannkonstante

Um die Boltzmannkonstante k zu bestimmen, berechnen wir zunächst folgende Differenz D:

$$D = \langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_v^2 \rangle \tag{10}$$

Der Fehler ergibt sich nach Gauß'scher Fehlerfortpflannzung

$$\Delta D = \sqrt{2(\langle U_{aus}^2 \rangle \cdot \Delta\langle U_{aus}^2 \rangle + \langle U_v^2 \rangle \cdot \Delta\langle U_v^2 \rangle)} \tag{11}$$

Die Differenz D ist im folgenden Plot aufgetragen:

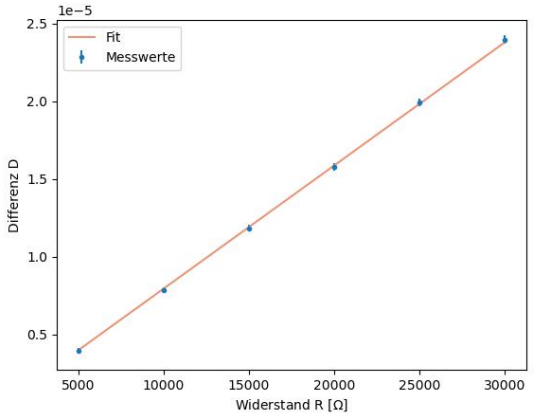


Abbildung 5: Widerstandswerte mit linearen Fit

Die Steigung $c = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_v^2 \rangle}{R}$ beträgt:

$$c = (7,939 \pm 0,023)\frac{V^2}{\Omega}$$

Die Boltzmannkonstante kann man mit Gleichung (8) berechnen. Zusätzlich teilen wir den Fehler in systematischen und in einen statistischen Teil auf.
Für den systematischen Fehler, der bei der Integration entsteht ist gegeben als

$$(\Delta k)_{syst.} = k \cdot \frac{\Delta B}{B}$$

Der statistische Fehler folgt auch aus Gauß'scher Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta k)_{stat.} = \sqrt{(\frac{\partial k}{\partial c}\Delta c)^2 + (\frac{\partial k}{\partial T}\Delta T)^2} \tag{12}$$

$$= k\sqrt{(\frac{\Delta c}{c})^2 + (\frac{\Delta T}{T})^2} \tag{13}$$

Die Temperatur wurde hier auf $T = (20 \pm 1)C^\circ$ geschätzt, da wir vergessen haben diese ins Messprotokoll zu schreiben. Diese Einschätzung erscheint aber plausibel.
Es ergibt sich also folgender Wert für die Boltzmannkonstante k:

$$k = (1469 \pm_{stat.} 7 \pm_{syst.} 29) \cdot 10^{-20}\frac{J}{K}$$

Addiert man die Fehler quadratisch ($\sqrt{x^2 + y^2}$) so erhält man

$$k = (1469 \pm 29,8) \cdot 10^{-20}\frac{J}{K}$$

Vergleicht man diesen mit dem Literaturwert von $1380,65 \cdot 10^{-20} \frac{J}{K}$(Quelle: Wikipedia ,Stand:2025), so erhält man folgende σ-Abweichung:

$$2,96$$

3.4 Güte des Fits

Die Summe von χ^2 und χ_{red} bestimmt erhält man folgende Werte:
χ^2: $0,996$
χ_{red}: $0,199$
Daraus ergibt sich eine Fitwahrscheinlichkeit von

$$96\%$$

4. Zusamenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

Mit unseren Messungen konnten wir folgenden Wert für die Boltmannkonstante k bestimmen:

$$k = (1,469 \pm 0,0298) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

dieser Wert hat eine σ-Abweichung von $2,96$ vom Literaturwert.

4.2 Diskussion und Kritik

Vergleicht man den Wert den man experimentell bestimmt hat mit den Literaturwert, sieht man ,dass der Wert für die Boltzmannkonstante k knapp innerhalb des 3σ-Bereiches mit $2,96$ liegt. Dies ist zwar akzeptabel, aber es lassen sich jedoch Fehlerquellen vermuten. Die größte Fehlerquelle ist hier wahrscheinlich, dass wir die Temperatur schätzen mussten. Dies ist natürlich ärgerlich, aber eine Schätzung von $20C^{\circ}$ erscheint jedoch plausibel. Weitere systematische Fehler sind, dass die Kabel auch Rauschen und Interferenz aufweisen, was die Werte beeinflusst. Eine Möglichkeit um dies zu minimieren, ist möglichst kurze Kabel zu nutzen. Auch wurde das Rauschen im Bandpassfilter und im Voltmeter nicht beachtet. Da dieses Rauschen um ca. 1000 geringer ist, als das Signal aus dem Verstärker, ist dieses Rauschen auch vernachlässigbar.
Die Güte des Fits gibt Ausschluss über die Qualität des Fits. Die Fitwahrscheinlichkeit liegt bei 96% was darauf schließt, dass die Messwerte sehr gut auf den gewählten Fit passen.

4.3 Fazit

In diesem Versuch konnte also ein wesentliches Verständnis des Phänomens der Rauschspannung gewonnen werden. Zudem wurde der Effekt genutzt, um die Boltzmann-Konstante auf zwei leicht verschiedene Varianten zu bestimmen. Die gemessenen Werte führen zu einem Wert für die Boltzmannkonstante, die zwar etwas vom Literaturwert abweicht, aber innerhalb des 3σ-Bereiches liegt.